חפירות על מתמטיקה - עצים אינסופיים

רועי שלו - בר אילן

1 ריענון בקבוצות

הגדרה 1.1. נאמר כי $(A,<)$ **קבוצה סדורה חלקית** (קס"ח) (Poset) אם:

- $<$ אנטי רפלקסיבי. כלומר $\neg(a<a)$ לכל $a\in A$.
- $<$ טרנזיטיבי. כלומר אם $(a<b)$ ו- $(b<c)$ אז $(a<c)$ לכל $a,b,c\in A$.

הגדרה 1.2. איבר $a\in A$ נקרא **איבר ראשון בקס"ח** $(A,<)$ אמ"מ לכל $b\in A\setminus\{a\}$ מתקיים $a<b$.

הגדרה 1.3. נאמר כי קס"ח $(A,<)$ היא **סדורה היטב** (well-ordered) אם לכל תת-קבוצה לא ריקה של A יש איבר ראשון.

הגדרה 1.4. קבוצה A נקראת **טרנזיטיבית** אם לכל $x\in A$ ולכל $y\in x$ מתקיים $y\in A$.

הגדרה 1.5. קבוצה A היא **סודר** (Ordinal) אמ"מ התנאים הבאים מתקיימים:

1. A טרנזיטיבית
2. $(A,\in)$ סדורה היטב.

הערה 1.6. נסמן סודרים באותיות יווניות קטנות: $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots$
נסמן $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$.
נכתוב $\alpha<\beta$ במקום $\alpha\in\beta$.
נכתוב $\alpha\leq\beta$ במקום $\alpha\subseteq\beta$.
מחלקת כל הסודרים - On, סדורה היטב על ידי יחס השייכות.

הגדרה 1.7. סודר α נקרא **סודר עוקב** אמ"מ קיים סודר β כך ש- $\alpha=\beta+1$. אחרת α נקרא **סודר גבולי**.

הגדרה 1.8. **מונה** הוא סודר α כך שלכל סודר $\beta<\alpha$, כל פונקציה $f:\beta\to\alpha$ איננה חח"ע ועל.

מונים נהוג לסמן באותיות יווניות: $\kappa,\lambda,\theta,\mu$.
המונה האינסופי הראשון הוא הסודר ω.
המונה הלא בן מנייה הראשון הוא הסודר ω_1.

2 עצים

הגדרה 2.1. קס"ח $(T,<)$ יקרא **עץ** אמ"מ קיים איבר ראשון לקס"ח ולכל $t\in T$ הקבוצה, $t_\downarrow:=\{s\in T\mid s<t\}$, סדורה היטב על ידי היחס $<$.

- כל איבר ב-T נקרא קודקוד, האיבר הראשון יקרא השורש.
- נגדיר פונקציית גובה, $\mathrm{ht}:T\to\mathrm{On}$, כאשר $\mathrm{ht}(x):=\mathrm{otp}(t_\downarrow,<)$.
- לכל סודר α הרמה ה-α-ית, T_α, היא קבוצת הקודקודים שהגובה שלהם הוא α.
- הגובה של עץ הוא הסודר α הקטן ביותר כך שהרמה ה-α-ית היא ריקה.
- ענף בעץ הוא תת קבוצה סדורה קווית מקסימלית בעץ.

סימון 2.2. לקודקוד $t\in T$ נגדיר את הקבוצה הבאה: $t_\uparrow:=\{s\in T\mid t\leq s\}$.
שימו לב כי זהו תת-עץ של T, עם שורש t.

הגדרה 2.3. יהי מונה κ, עץ $(T,<)$ יקרא **κ-עץ** אם הגובה שלו הוא κ ובנוסף לכל $\alpha < \kappa$, מתקיים כי $|T_\alpha| < \kappa$.

הגדרה 2.4. נאמר כי עץ $(T,<)$ הוא **נורמלי** אם:

- לכל קודקוד $x \in T$, הקבוצה $x_\uparrow$ מכילה קודקוד בכל רמה מתחת לגובה של העץ.
- לכל סודר גבולי $\alpha < \mathrm{ht}(T)$ ולכל שני קודקודים שונים $x, y \in T_\alpha$ מתקיים כי $x_\downarrow \neq y_\downarrow$.

למה 2.5 (הלמה של קניג, König 1927 **).** יהי ω-עץ T, אז העץ T מכיל ענף אינסופי.

הגדרה 2.6. נאמר כי עץ $(T,<)$ הוא **מתפצל** אם לכל קודקוד $x \in T$ קיימים שני קודקודים שונים בעץ $y_0, y_1 \in T$ כך ש- $x < y_0$, $x < y_1$ וגם $\mathrm{ht}(y_0) = \mathrm{ht}(y_1) = \mathrm{ht}(x) + 1$.

3 עץ ארונשיין

הגדרה 3.1. ω_1-עץ יקרא **עץ ארונשיין** אם כל שרשרת בו היא בת מנייה.
זאת אומרת, לא קיים בו ענף לא בן מנייה.

משפט 3.2. קיים עץ ארונשיין.

הוכחה. נבנה עץ ארונשיין $T \subseteq \mathbb{Q}^{<\omega_1}$.
כל קודקוד בעץ T יהיה פונקציה עולה $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ עבור $(\alpha < \omega_1)$.
עבור $f, g \in T$, נגדיר את יחס הסדר על העץ T באופן הבא:

$$f < g \iff g \restriction \mathrm{dom}(f) = f$$

זאת אומרת, g מרחיב את f, $f \subseteq g$.
נשים לב כי כל קודקוד בעץ הוא פונקציה עולה ולכן בהכרח חח"ע.
אך נשים לב שלא קיימת פונקציה $f : \omega_1 \to \mathbb{Q}$ חח"ע. לכן, לא תיתכן שרשרת מגודל לא בן מנייה בעץ.
נדרוש במהלך הבנייה שלנו את התנאים הבאים:

(1) לכל $\alpha < \omega_1$, הרמה T_α היא בת מנייה.

(2) אם f קודקוד ב-T, אז f עולה ו- $\sup(\mathrm{Im}(f)) \in \mathbb{Q}$.

(3) אם $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ קודקוד ב-T, אז לכל $q > \sup(\mathrm{Im}(f))$ קיים קודקוד $g : \alpha + 1 \to \mathbb{Q}$ כך ש- $g \restriction \alpha = f$ ו- $g(\alpha) = q$.

(4) אם $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ קודקוד בעץ T, ו- $\beta < \alpha$, אז גם $f \restriction \beta \in T$.

נשים לב כי תנאי (4) אלו אומרים כי אם הפונקציה $f : \alpha \to \mathbb{Q}$ היא קודקוד בעץ, אז $\mathrm{ht}(f) = \alpha$.
נבנה ברקורסיה על $\alpha < \omega_1$ את העץ T:

- ◄ $\underline{\alpha = 0}$: נגדיר $f = \emptyset$ להיות השורש של העץ T.
- ◄ $\underline{\text{צעד עוקב, } \alpha = \beta + 1}$: תהי $f \in T_\beta$ פונקציה,
  על פי הנחות הרקורסיה, ידוע כי f פונקצייה עולה וכי $\sup(\mathrm{Im}(f)) \in \mathbb{Q}$.
  לכל $\sup(\mathrm{Im}(f)) < q \in \mathbb{Q}$, נגדיר פונקציה $f < g$ כך ש- $g(\beta) = q$.
  נשים לב כי $\aleph_0 = |T_\beta| = |\mathbb{Q}|$ ולכן גם $|T_\alpha| = \aleph_0$.
- ◄ $\underline{\text{צעד גבולי, } \alpha}$: לכל $\beta < \alpha$, פונקציה $f \in T_\beta$ ו- $p = \sup(\mathrm{Im}(f)) < q$,
  נבחר סדרה עולה של סודרים $\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$ המתכנסת ל-α כך ש- $\alpha_0 = \beta$.

  $$\beta = \alpha_0 < \alpha_1 \cdots < \alpha_n \ldots$$
  $$\sup\{\alpha_n \mid n < \omega\} = \alpha$$

  בנוסף נבחר סדרה עולה $\langle p_n \mid n < \omega \rangle$, ב-$\mathbb{Q}$ המתכנסת ל-q, כך ש- $p = p_0$.

  $$p = p_0 < p_1 \cdots < p_n \ldots$$
  $$\sup\{p_n \mid n < \omega\} = q$$

  כעת נבחר סדרה עולה של קודקודים בעץ, $\langle f_n \mid n < \omega \rangle$ כך ש-:

(a) לכל $n < \omega$, מתקיים כי $f_n \in T_{\alpha_n}$ ו- $\sup(\mathrm{Im}(f_n)) = p_n$.
(b) $f = f_0 < f_1 < f_2 < \dots$.

נגדיר לבסוף את הפונקציה, $g := \bigcup_{n<\omega} f_n$, נשים לב כי זוהי פונקציה מוגדרת היטב,
$g : \alpha \to \mathbb{Q}$ כך ש- $\sup(\mathrm{Im}(g)) = q$ ו- $f < g$ כפי שרצינו.
נשים לב כי α בן מנייה, ולכל $\beta < \alpha$ מתקיים $|T_\beta| = \aleph_0$ על פי הנחת הרקורסיה.
בנוסף $\mathbb{Q}$ בן מנייה, ולכן $|T_\alpha| = \aleph_0$ כנדרש.

לסיום נגדיר את העץ, $T := \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$.
נשים לב כי כל רמה בעץ היא בת מנייה וכי לא קיימת שרשרת לא בת מנייה, ולכן העץ T הוא עץ ארונשיין. □

4 עץ מיוחד

הגדרה 4.1. יהי עץ $(T,<)$, נאמר כי תת קבוצה $A \subseteq T$ היא **אנטי-שרשרת** אם כל זוג איברים בקבוצה לא מקיימים את היחס $<$.

הגדרה 4.2. ω_1-עץ יקרא **מיוחד** אם הוא איחוד בן מנייה של אנטי-שרשראות.

משפט 4.3. קיים עץ ארונשיין מיוחד.

הוכחה. נראה כי עץ הארונשיין שבנינו במשפט הקודם הוא מיוחד.
לכל $q \in \mathbb{Q}$, נגדיר הקבוצה הבאה:

$$A_q := \{f \in T \mid \sup(\mathrm{Im}(f)) = q\}.$$

נראה כי A_q היא אנטי-שרשרת ולכן כיוון ש-$\mathbb{Q}$ בן מנייה העץ T מיוחד.
יהיו $f, g \in A_q$, נניח בשלילה כי $f < g$.
יהיו סודרים α ו- β כך ש-$\alpha = \mathrm{dom}(f)$ ו- $\beta = \mathrm{dom}(g)$.
כיוון ש- $g > f$ בהכרח $\beta = \mathrm{ht}(g) > h(f) = \alpha$.
על פי הגדרת יחס הסדר של T, מתקיים כי

$$g \restriction \mathrm{dom}(f) = f$$

כזכור, g פונקציה עולה, נחלק לשני מקרים:
◄ β סודר עוקב, $\beta = \gamma + 1$.
מתקיים $\alpha \geq \gamma$, מהבנייה ידוע לנו כי:

$$\sup(\mathrm{Im}(g)) = g(\gamma) > \sup(\mathrm{Im}(g \restriction \gamma)) \geq \sup(\mathrm{Im}(f))$$

בסתירה לכך ש- $\sup(\mathrm{Im}(f)) = \sup(\mathrm{Im}(g))$.
◄ β גבולי. נשים לב כי $\beta > \alpha + 1 > \alpha$.
כיוון ש-g פונקציה עולה, מתקיים כי

$$\sup(\mathrm{Im}(g)) > g(\alpha+1) > g(\alpha) \geq \sup(\mathrm{Im}(f))$$

בסתירה לכך ש- $\sup(\mathrm{Im}(f)) = \sup(\mathrm{Im}(g))$.

□

5 עצים שאינם תלויים ב-ZFC

הגדרה 5.1. יהי עץ $(T,<)$.

- נאמר כי תת קבוצה $D \subseteq T$ היא **צפופה** אם לכל קודקוד $t \in T$ קיים איבר $d \in D$ כך ש- $t \leq d$.
- נאמר כי תת קבוצה $U \subseteq T$ היא **פתוחה** אם לכל $x \in U$ ו- $x < y$ מתקיים כי $y \in U$.

הגדרה 5.2. ω_1-עץ יקרא **עץ סוסלין** אם כל שרשרת וכל אנטי שרשרת הן בנות מנייה.

דוגמה 5.3. עץ מיוחד אינו עץ סוסלין.
נשים לב כי בעץ מיוחד בהכרח קיימת אנטי-שרשרת לא בת מנייה.

הערה 5.4. קיומו של עץ סוסלין בלתי תלוי באקסיומות של ZFC.
תחת האקסיומה $V = L$ קיים עץ סוסלין.
לעומת זאת מאקסיומת מרטין נובע כי כל עץ ארונשיין הוא מיוחד, ולכן אין עצי סוסלין.

תרגיל 5.5. יהי $(T, <)$ עץ סוסלין, אם $D \subseteq T$ צפופה ופתוחה אז $T \setminus D$ היא בת מנייה.

הוכחה. תהי אנטי-שרשרת מקסימלית $A \subseteq D$, על פי הלמה של צורן קיימת כזאת.
כיוון ש-T עץ סוסלין, A בהכרח בת מנייה, ולכן קיים סודר $\alpha < \omega_1$ כך ש- $h(z) < \alpha$ לכל $z \in A$.
נטען כי $T_{\geq\alpha} = \{x \in T \mid \mathrm{ht}(x) \geq \alpha\} \subseteq D$.
יהי $x \in T_{\geq\alpha}$ כלשהו, כיוון ש-D צפופה, קיים $x \leq y \in D$.
כיוון ש-A אנטי שרשרת מקסימלית ב-D, בהכרח $A \cup \{y\}$ לא אנטי-שרשרת.
לכן קיים $z \in A$ כך ש- y ו- z ניתנים להשוואה.
כיוון ש- $\mathrm{ht}(z) < \alpha \leq \mathrm{ht}(y)$, בהכרח מתקיים כי $z < y$.
קיבלנו כי מתקיים: $y < x < z \in D$, ולכן מאחר ש-D פתוחה, קיבלנו כי $x \in D$ כנדרש.
לסיום, נשים לב כי $T \setminus D \subseteq T_{<\alpha}$ ולכן מאחר ש- α וכל רמה בעץ בת מנייה, $T \setminus D$ בן מנייה כפי שרצינו.

□

6 משחק

לצורך התרגיל הבא ניתן אינטואיציה לרעיון של משחק ואסטרטגיית ניצחון בין שני שחקנים.

דוגמה 6.1. שני שחקנים, א' ו-ב' בוחרים בזה אחר זה סדרת מספרים ממשיים עולה, כאשר שחקן א' בוחר מספר ראשון.
שחקן א' מנצח אם ורק אם הסדרה המתקבלת חסומה.
אסטרטגייה עבור שחקן היא פונקציה המחליטה מהו הצעד שהשחקן יבצע בהינתן ההיסטוריה המלאה של המשחק.
נאמר כי לשחקן יש אסטרטגיית ניצחון, אם ורק אם קיימת פונקציה כנ"ל כך שבכל משחק בו השחקן יפעל על פי האסטרטגיה הוא ינצח.
במשחק שהגדרנו, לשחקן ב' יש אסטרטגיית ניצחון, לדוגמה: לבחור בכל צעד את המספר $x + 1$ כאשר x הוא המספר האחרון שבחר היריב.

תרגיל 6.2. יהי $(T, <)$ ω_1-עץ נורמלי ומתפצל.
שני שחקנים, א' ו-ב' בוחרים בזה אחר זה סדרה עולה של קודקודים בעץ T, $\langle t_n \mid n < \omega\rangle$,
כאשר שחקן א' בוחר ראשון את האיבר t_0.
שחקן א' מנצח אם ורק אם קיים קודקוד בעץ מעל לכל הסדרה.
הוכח את הדברים הבאים:

(a) לשחקן א' אין אסטרטגיית ניצחון.

(b) אם העץ $(T, <)$ הוא מיוחד, אז לשחקן ב' יש אסטרטגיית ניצחון.

$(c)*$ אם העץ $(T, <)$ סוסלין, אז לשחקן ב' אין אסטרטגיית ניצחון.

הוכחה. (a) נניח כי הפונקציה $\sigma : [T]^{<\omega} \to T$ היא אסטרטגיית ניצחון עבור שחקן א'.
זאת אומרת, בהינתן חלק סופי של משחק, בחירה של סדרת קודקודים, $\langle t_i \mid i \leq 2n - 1\rangle$,
שחקן א' יבחר קודקוד $t_{2n} = \sigma(\{t_i \mid i \leq 2n - 1\})$.

טענה 6.2.1. קיים $\alpha < \omega_1$ כך שלכל סדרה סופית עולה של קודקודים $\langle t_i \mid i \leq 2n - 1\rangle$,
אם $\mathrm{ht}(t_{2n-1}) < \alpha$, אז $\sigma(\{t_i \mid i \leq 2n - 1\}) = t_{2n}$ הוא כך ש- $\mathrm{ht}(t_{2n}) < \alpha$.

הוכחה. נבנה באינדוקציה סדרה של סודרים $\langle \alpha_m \mid n < \omega\rangle$ כך ש-:

$$B_m := \{\mathrm{ht}(t_{2n}) \mid h(t_{2n-1}) < \alpha_n,\ t_{2n} = \sigma(\{t_i \mid i \leq 2n - 1\})\}$$

$$\sup(B_m) < \alpha_{m+1}$$

◄ יהי $m < \omega$, נשים לב כי הקבוצה $B_m \subseteq \omega_1$ היא בת מנייה.
ולכן ניתן לבחור α_{m+1} חסם של B_m.

נגדיר, $\alpha = \sup(\{\alpha_m \mid m < \omega\})$.

נראה כי α הוא כנדרש, יהי סדרת קודקודים סופית מגובה קטן מ-α,

קיים $m < \omega$ כך ש- $\mathrm{ht}(t_{2n-1}) < \alpha_m$,

לכן מהבנייה מתקיים כי עבור $t_{2n} = \sigma(\{t_i \mid i \leq 2n-1\})$ ידוע לנו כי $\mathrm{ht}(t_{2n}) < \alpha_{m+1} < \alpha$ כנדרש. ■

יהי α כמו בטענה, נבחר סדרה עולה של סודרים, $\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$ המתכנסת ל-α.

כזכור T_α היא בת מנייה, ולכן ניתן לבחור מנייה $\langle p_n \mid n < \omega \rangle$.

כזכור, שחקן א' יפעל על פי האסטרטגיה המנצחת σ, נגדיר מהלך משחק עבור שחקן ב'.

◄ בהינתן בחירה של קודקוד t_{2n} על ידי שחקן א',

שחקן ב' בוחר מבין הקודקודים העוקבים ל-t_{2n} ברמה העוקבת (ישנם לפחות שניים כאלו), קודקוד שאינו מתחת ל- p_n, נסמנו a_n.

זאת אומרת, $t_{2n} < a_n \not< p_n$.

כיוון שהעץ נורמלי, ניתן לבחור קודקוד t_{2n+1} גדול מ-a_n כך ש- $\alpha_n < \mathrm{ht}(t_{2n+1}) < \alpha$.

נשים לב כי הבחירה התבצעה כך ש- $t_{2n} < t_{2n+1} \not< p_n$.

כעת נניח שהמשחק הסתיים, התקבלה סדרה אינסופית עולה של קודקודים $\langle t_n \mid n < \omega \rangle$.

נשים לב כי $\sup\{\mathrm{ht}(t_n) \mid n < \omega\} = \alpha$.

נניח בשלילה כי שחקן א' ניצח, זאת אומרת כי קיים קודקוד $s \in T$ מעל כל איבר בסדרה.

נסתכל על הקודקוד היחיד שקטן שווה לו ונמצא ברמה T_α,

זאת אומרת, קיים ויחיד $n < \omega$ כך ש- $p_n \leq s$.

ידוע כי הקבוצה $s_\downarrow := \{z \in T \mid z \leq s\}$ סדורה היטב, נשים לב כי קיבלנו סתירה:

$$p_n < s \,;\; t_{2n+1} < s \,;\; t_{2n+1} \not< p_n \,;\; p_n \not< t_{2n+1}.$$

(b) נניח כי העץ T מיוחד, זאת אומרת קיימת סדרה של אנטי-שרשראות $\langle A_n \mid n < \omega \rangle$ כך ש- $T = \bigcup_{n<\omega} A_n$.

נגדיר עבור שחקן ב' את האסטרטגיה הבאה:

בהינתן $n < \omega$ ובחירה של שחקן א' בקודקוד t_{2n},

נשאל האם קיים איבר

$$t_{2n} < s \in A_n$$

אם כן, נגדיר $t_{2n+1} := s$, אם לא, מכך שהעץ נורמלי, נבחר את t_{2n+1} להיות קודקוד כלשהו ברמה העוקבת שגדול מ-t_{2n}.

נניח בשלילה כי קיים קודקוד t מעל כל הסדרה העולה $\langle t_n \mid n < \omega \rangle$,

כיוון ש- $T = \bigcup_{n<\omega} A_n$, קיים $n < \omega$ כך ש- $t \in A_n$.

נסתכל על הבחירה של השחקן ב' בשלב $2n$ ונחלק למקרים:

◄ אם $t_{2n+1} \in A_n$ אז כיוון ש-A_n אנטי-שרשרת לא ייתכן שמתקיים $t_{2n+1} < t$, וזוהי סתירה.

◄ אם $t_{2n+1} \notin A_n$, אז לא קיים איבר ב-A_n מעל ל- t_{2n}, בסתירה לכך ש- $t_{2n} < t \in A_n$.

לכן בהכרח שחקן א' הפסיד, ולכן שחקן ב' ינצח על ידי שימוש באסטרטגיה זאת!

(c) נניח בשלילה כי לשחקן ב' יש אסטרטגיית ניצחון, נסמנה σ.

נבנה משחק בו שחקן ב' פועל על פי האסטרטגיה σ אך מפסיד,

זאת אומרת, עבור הסדרה העולה שנבנית במשחק יש קודקוד שנמצא מעל כולם.

לכל צעד של שחקן א', זאת אומרת בחירת קודקוד t_{2n},

שחקן ב' משיב על ידי בחירת $t_{2n} < \sigma(\{t_{2n}\})$.

נבנה ברקורסיה על $n < \omega$ את האוביקטים הבאים:

(א) סדרה עולה של סודרים $\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$;

(ב) סדרה של קבוצות פתוחות וצפופות $\langle D_n \mid n < \omega \rangle$;

(ג) תת-משחק סופי $P_n(x)$ לכל $x \in T_{\alpha_n}$ כך שסיבוב $n+1$ שחקן א' יכול לבחור את הערך x.

סדרה של משחקים סופיים:

◄ צעד בסיס: ראשית נגדיר קבוצה:

$$D_0 := \{s \in T \mid \exists t_0 \in T : [\sigma(\{t_0\}) \leq s]\}$$

ברור כי D_0 פתוחה, נראה כי היא גם צפופה:

יהי $a \in T$ נשים לב כי $a < \sigma(\{a\}) \in D_0$ כנדרש.

לפי תרגיל קודם, כיוון ש-D_0 צפופה ופתוחה, קיים סודר $\alpha_0 < \omega_1$ כך ש- $T_{\alpha_0} \subseteq D_0$.

נשים לב כי לכל $x \in T_{\alpha_0}$ יש משחק חלקי $P_0(x)$ של סיבוב משחק בודד, כך ש- $\sigma(\{a_0^x\})$,a_0^x יכול להמשיך על ידי שחקן א' על ידי איבר ב- $x_\uparrow$.

◄ צעד עוקב: נחזור שוב על הטיעון לכל איבר $x \in T_{\alpha_n}$, כאשר נסתכל באופן בודד על התת עץ $x_\uparrow$ על ידי שימוש בסבב ה-n-י של σ, נמשיך את המשחק $P_n(x)$.

נגדיר את הקבוצה הפתוחה וצפופה ב- $x_\uparrow$:

$$D_{n+1,x} := \{s \in T \mid \exists t_{2n+1} \in x_\uparrow : [\sigma(P_n(x) \cup \{t_{2n+1}\}) \leq s]\}$$

על פי תרגיל קודם, קיים סודר $\alpha_{n+1,x} < \omega_1$ כך ש- $T_{\alpha_{n+1,x}} \cap x_\uparrow \subseteq D_{n+1,x}$.

נגדיר $\alpha_{n+1} := \sup\{\alpha_{n+1,x} \mid x \in T_{\alpha_n}\}$.

כמו בצעד הקודם, ניתן לבחור לכל $x \in T_{\alpha_{n+1}}$ משחק סופי $P_{n+1}(x)$ שמרחיב את $P_n(y)$ עבור $y \in x_\downarrow \cap T_{\alpha_n}$.

בסיום הרקורסיה, נגדיר $\alpha := \sup\{\alpha_n \mid n < \omega\}$.

יהי $x \in T_\alpha$, נגדיר לכל ω_n את הקודקוד t_i להיות הקודקוד היחיד ב-$x_\downarrow \cap T_{\alpha_n}$.

נבחר משחק שהוא איחוד המשחקים, $\bigcup_{n<\omega} P_n(t_n)$.

זהו משחק בו שחקן ב' משחק לפי האסטרטגיה σ וכל קודקוד שנבחר נמצא מתחת ל-x, ולכן שחקן ב' מפסיד.

□

***תרגיל רשות 6.3.** יהי עץ סוסלין $(T,<)$ ותת קבוצה $A \subseteq T$ לא בת מנייה, אז A צפופה באיזשהו מקום.
זאת אומרת, קיים קודקוד $t \in T$ כך שלכל $x \geq t$ קיים $y \in A$ כך ש- $x < y$.

***תרגיל רשות 6.4.** יהי עץ סוסלין $(T,<)$, אז טופלוגיית הסדר היא מרחב טופולוגי נורמלי.

7 תורת מבנה של עצי ארונשיין

נסתכל על מחלקת כל ω_1-עצי ארונשיין, $\mathcal{A}$.
נגדיר יחס סדר $\leq$ בין שני עצים $T,S \in \mathcal{A}$, נסמן $T \leq S$ אם קיימת פונקציה משמרת סדר מ-T ל-S.

משפט 7.1 (Todorcević, 2007)**.** קיימת משפחה מעוצמה $2^{\aleph_1}$ של עצי ארונשיין אשר אינם ניתנים להשוואה בזוגות ביחס הסדר $\leq$.

משפט 7.2 (Todorčević, 2007)**.** ישנה סדרה של עצי ארונשיין קוהרנטים, $\langle S_m \mid m \in \mathbb{Z}\rangle$ כך שלכל $m < n$ שלמים מתקיים $S_m < S_n$.

משפט 7.3 (שלח-אברהם, 1985)**.** תחת אקסיומת מרטין ו- $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ מתקיים כי כל שני עצי ארונשיין סל"ח-איזומורפיים.

משפט 7.4 (Baumgartner-Malitz-Reinhardt, 1970)**.** תחת אקסיומת מרטין כל עץ ארונשיין הוא מיוחד.

משפט 7.5 (Todorčević, 2007)**.** תחת PFA קיימת תת מחלקה $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ של עצים הנקראיים עצי ליפשיץ.
כל שני עצים ב-$\mathcal{C}$ ניתנים להשוואה, בנוסף בשרשרת $\mathcal{C}$ לא קיים מקסימום ולא מינימום.

7.1 מה קורה ב-$\aleph_2$?

משפט 7.6 (לייבר-שלח, 1981)**.** אם קיים מונה קומפקטי חלש, אז עקבי עם השערת הרצף כי לא קיימים עצי ω_2-סוסלין.

משפט 7.7 (Krueger, 2008)**.** אם קיים מונה בל-יתאר *(ineffable)*, אז עקבי עם השערת הרצף כי כל שני עצי ω_2-ארונשיין נורמלים וסגורים לסדרות בנות מנייה איזומורפיים על סל"ח.
למעשה, כל עץ נורמלי ω_2-ארונשיין הוא מיוחד.

8 תורת מבנה של סדרים לינאריים לא בני מנייה

משפט 8.1 (Baumgartner, 1973)**.** תחת PFA כל שתי קבוצות של ממשיים $\aleph_1$-צפופים איזומורפיים סדר.

משפט 8.2 (Moore, 2006)**.** תחת PFA למחלקת הסדרים הלינאריים הלא בני מנייה קיים בסיס מגודל 5:

$$\{X, \omega_1, \omega_1^*, C, C^*\}$$

C הוא ישר קאנטרימן - ישר לינארי כך ש-C^2 הוא איחוד בן מנייה של שרשראות.
X הוא קבוצה מגודל $\aleph_1$ של ממשיים.
B^* הוא הסדר הלינארי של הקבוצה B עם הסדר ההפוך מ-B.